МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. МЕТОДЫ АДАМСА.

Кутушев Р.Р., студент,
Бигаева Л.А., к.ф.-м.н., доцент,
Бирский филиал УУНиТ, г.Бирск, Россия

Аннотация. В данной работе анализируются методы Адамса как инструмент решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, с демонстрацией их практического применения.

Ключевые слова: методы Адамса, задачи Коши, явные методы Адамса-Башфорта, неявные методы Адамса-Мультона, метод итераций, многошаговый метод

Методы Адамса

Рассмотрим методы Адамса и его применение в программной реализации решения ОДУ [2, 3].

Семейство численных методов Адамса предназначено для приближенного решения задач Коши, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Эти многошаговые методы используют значения решения из нескольких предыдущих шагов для вычисления приближения на текущем шаге. Существуют два основных класса методов Адамса: явные (Адамса-Башфорта) и неявные (Адамса-Мультона).

Явные методы Адамса-Башфорта: Аппроксимируют интеграл $y_{i+1} = y_i + \int_{x_1}^{x_{i+1}} f(x, y)\,dx$ с помощью интерполяционной формулы Ньютона для f(x, y) по предыдущим точкам. Формула для метода p-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{j=0}^{p-1} \beta_j f(x_{i-j}, y_{i-j})$$

где h — шаг интегрирования, а β_j — коэффициенты, зависящие от порядка метода. Например:

Первый порядок (метод Эйлера):

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_i,y_i)(\beta_0=1)$$

Второй порядок:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\cdot\left(3f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})\right)\left(\beta_0=\frac{3}{2},\beta_1=-\frac{1}{2}\right)$$

Третий порядок:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}\cdot\left(23f(x_i,y_i)-16f(x_{i-1},y_{i-1})+5f(x_{i-2},y_{i-2})\right)$$

Неявные методы Адамса-Мультона: Аналогично, но используют интерполяционную формулу для f(x,y) по текущей и предыдущим точкам, что делает метод неявным. Формула для метода p-го порядка:

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot\sum_{j=0}^{p}\alpha_j f(x_{i+1-j},y_{i+1-j})$$

где α_j — коэффициенты, зависящие от порядка метода. Например:

Первый порядок (неявный метод Эйлера):

$$y_{i+1}=y_i+h\cdot f(x_{i+1},y_{i+1})(\alpha_0=1)$$

Второй порядок:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}\cdot\left(f(x_{i+1},y_{i+1})+f(x_i,y_i)\right)\left(\alpha_0=\frac{1}{2},\alpha_1=\frac{1}{2}\right)$$

Третий порядок:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{12}\cdot\left(5f(x_{i+1},y_{i+1})+8f(x_i,y_i)-f(x_{i-1},y_{i-1})\right)$$

Пример

В примере кода используется задача Коши первого порядка с уравнением y’ = x + y и начальным условием y(0) = 1.

Параметры:

1) y0 = 1: Начальное значение функции y в точке x = 0.

2) h = 0.1: Шаг интегрирования. Он определяет, насколько часто вычисляются значения y. Меньший шаг обычно приводит к большей точности, но увеличивает время вычислений.

3) n = 11: Количество точек, в которых вычисляется приближенное решение. Шаг h и количество точек n связаны: n = (x_конец - x_начало) / h + 1. В примере x_конец = 1, x_начало = 0.

4) x[]: Массив значений x, в которых вычисляется решение. Он генерируется в цикле в main методе.

5) f = (xVal, yVal) -> xVal + yVal;: Lambda-выражение, которое задает правую часть дифференциального уравнения. Это функция f(x, y) = x + y.

В итоге, программа численно приближает решение дифференциального уравнения y' = x + y с начальным условием y(0) = 1 на интервале от 0 до 1 с шагом 0.1, используя неявный метод Адамса-Мультона второго порядка. Результат (рисунок 1) представлен в виде столбцов: 1 - значение x, 2 - значчение y по методу Адамса-Мультона, 3 - значение $y_{точное}$ вычесленное по формуле $y_{точное} = 2e^{x} - x - 1$.

Код программы

```
public class AdamsMoultonFirstOrder {
    public static double[] solve(double[] x, double y0, double h, Function f) {
        int n = x.length;
        double[] y = new double[n];
        y[0] = y0; y[1] = y[0] + h * f.apply(x[0], y[0]);
        for (int i = 1; i < n - 1; i++) {
            double y_next = y[i] + h / 2.0 * (f.apply(x[i], y[i]) + f.apply(x[i + 1], y[i]));
            for (int j = 0; j < 10; j++) {
                y_next = y[i] + h / 2.0 * (f.apply(x[i], y[i]) + f.apply(x[i + 1], y_next));}
            y[i + 1] = y_next;}
        return y;}
    interface Function {double apply(double x, double y);}
```

```
public static double exactSolution(double x) {return 2 * Math.exp(x) - x - 1;}
public static void main(String[] args) {
double y0 = 1; double h = 0.1;
int n = 11;
double[] x = new double[n];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    x[i] = i * h;}
Function f = (xVal, yVal) -> xVal + yVal;
double[] y = solve(x, y0, h, f);
System.out.println("x\ty (приближенное)\ty (точное)");
for (int i = 0; i < x.length; i++) {
    double exact = exactSolution(x[i]);
    System.out.printf("%.2f\t%.5f\t\t\t%.5f%n", x[i], y[i], exact);}}}
```

x	y (приближенное)	y (точное)
0,00	1,00000	1,00000
0,10	1,10000	1,11034
0,20	1,23158	1,24281
0,30	1,38753	1,39972
0,40	1,57043	1,58365
0,50	1,78311	1,79744
0,60	2,02870	2,04424
0,70	2,31067	2,32751
0,80	2,63284	2,65108
0,90	2,99946	3,01921
1,00	3,41519	3,43656

Рисунок 1 - Результат программного решения задачи Коши методом Адамса

Заключение

Методы Адамса эффективно решают задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Явные методы (Адамса-Башфорта) проще, но неявные (Адамса-Мультона) точнее и устойчивее, особенно для сложных задач, хотя и требуют решения нелинейных уравнений.

Выбор метода и его порядка зависит от требуемой точности и вычислительных ресурсов.

Литература

1. Бигаева, Л. А. Курс лекций по численным методам: Учебное пособие для студентов физико-математического факультета / Л. А. Бигаева, И. И. Латыпов. – Бирск: Башкирский государственный университет, 2018. – 138 с. – ISBN 978-5-86607-476-5. – EDN UMYXHX

2. Латыпов, И. И. Компьютерное моделирование / И. И. Латыпов, Л. А. Бигаева. – Бирск: Бирский филиал Уфимского университета науки и технологии, 2023. – 142 с. – EDN RRSXBP.

3. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений Интернет//Учитесь.ру: Справочник. URL: https://tinyurl.com/jkvb64cn (дата обращения: 29.11.2024).